



5.3 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Έστω $M(a, \beta)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = \alpha + \beta i$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O , δηλαδή

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Για παράδειγμα, $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Όταν ο μιγαδικός z είναι της μορφής $z = \alpha + 0i = \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |\alpha|$, που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Αν $z = \alpha + \beta i$, τότε $\bar{z} = \alpha - \beta i$ και $-z = -\alpha - \beta i$, επομένως,

- $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Οι επόμενες ιδιότητες αναφέρονται στις σχέσεις που συνδέουν το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών με τα μέτρα τους και είναι ίδιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 \\ &\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \\ &\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2, \quad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$$

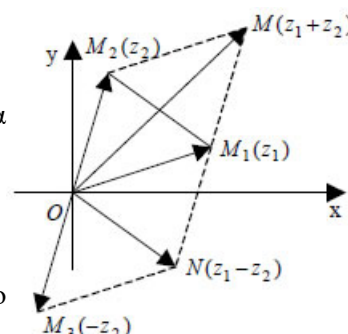
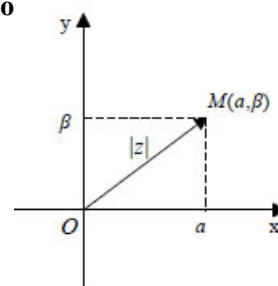
και ειδικότερα

$$|z^n| = |z|^n$$

Τέλος, από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{ON} είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2 M_1}$. Επομένως:



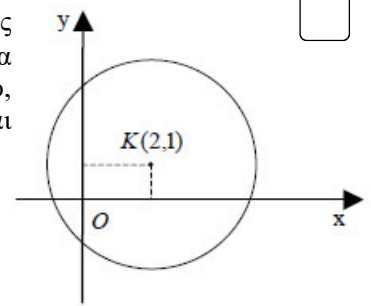


Έτσι, για παράδειγμα, η εξίσωση $|z - (2 + i)| = 3$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από την εικόνα του μιγαδικού $2 + i$, δηλαδή από το σημείο $K(2, 1)$ του μιγαδικού επιπέδου, απόσταση 3 μονάδες και μόνο από αυτούς. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(2, 1)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

Γενικά, η εξίσωση

$$|z - z_0| = \rho, \quad \rho > 0$$

παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ .

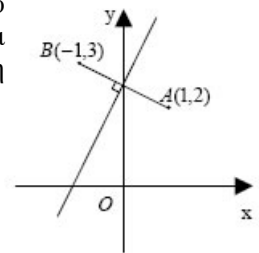


Επίσης η εξίσωση $|z - (1 + 2i)| = |z - (-1 + 3i)|$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να ισαπέχουν από τις εικόνες των μιγαδικών $1 + 2i$ και $-1 + 3i$, δηλαδή από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, 3)$, και μόνο από αυτούς. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση της μεσοκάθετου του τμήματος AB .

Γενικά, η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, \dots, z_n ισχύει

$$\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \right| + \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_n - i}{z_n + i} \right| < 1,$$

να αποδειχτεί ότι κανένας από αυτούς δεν είναι πραγματικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ένας από τους z_1, z_2, \dots, z_n για παράδειγμα ο z_k , ήταν πραγματικός, τότε οι μιγαδικοί $z_k - i$ και $z_k + i$ θα ήταν

$$\text{συζυγείς και επομένως } \left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| = \frac{|z_k - i|}{|z_k + i|} = 1,$$

αφού

τα μέτρα δύο συζυγών μιγαδικών είναι ίσα. Τότε όμως θα είχαμε

$$\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \right| + \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_k - i}{z_k + i} \right| + \dots + \left| \frac{z_n - i}{z_n + i} \right| \geq 1,$$

που είναι άτοπο.

2. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - (2 + 2i)| = \sqrt{2}$, να βρεθεί:

- Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο.
- Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

ΛΥΣΗ

α) Η ισότητα $|z - (2 + 2i)| = \sqrt{2}$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από το σημείο $K(2, 2)$ σταθερή απόσταση ίση

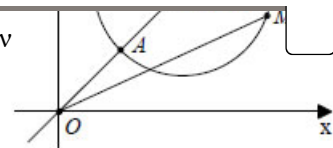
ίση με $\sqrt{2}$ και μόνο από αυτούς. Επομένως, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2, 2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$, δηλαδή ο κύκλος



Η εξίσωση, όμως, της ευθείας ΟΚ είναι η $y=x$. Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β θα είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ y=x \end{cases},$$

που είναι τα ζεύγη (1,1) και (3,3). Άρα, η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με $(OB) = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ και η ελάχιστη ίση με $(OA) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$$1+i, \quad 1-i, \quad 3+4i, \quad 3-4i, \quad -5i, \quad -4, \quad \frac{1+i}{1-i},$$

$$(1-i)^2 \cdot (1+i)^4, \quad (2-i) \cdot (1+2i) \quad \text{και} \quad \frac{3+i}{4-3i}.$$

2. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$$(1+i)^2, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2, \quad \left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2, \quad \text{όπου } \lambda, \mu \in \mathbf{R} \text{ με } |\lambda| + |\mu| \neq 0.$$

3. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z=x+yi$ για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) |z^2| = z^2 \quad \beta) |z-1| = z \quad \gamma) |z+i| = 2\bar{z}.$$

4. Να βρείτε που ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) |z|=1 \quad \beta) |z-i|=1 \quad \gamma) |z+1+2i|=3 \quad \delta) 1 < |z| < 2 \quad \epsilon) |z| \geq 2.$$

5. Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) |z+1|=|z-2i| \quad \beta) |z-i| > |z+1|$$

6. Αν $x \in \mathbf{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z , όπου

$$z = \frac{1+xi}{x+i}.$$

7. Από τους μιγαδικούς z , για τους οποίους ισχύει $|z-4i|=2$, ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο;

8. Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w = 2z + 1$

**B' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει:

$$\sqrt{2} \cdot |z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

2. Έστω ο μιγαδικός z , για τον οποίο ισχύει $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι: Αν $|z|=1$, τότε ο $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αριθμός και αντιστρόφως.

3. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι: Ο $w = z + \frac{1}{z}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$.

4. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι: ο $w = \frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

5. Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=1$, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{2z-i}{iz+2}$.

6. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|2z-1|=|z-2|$, να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

7. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |1+z|^2 + |1-z|^2$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

8. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει: $|z+1|=|z+4i|$. Ποιο από τα σημεία M απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή $O(0,0)$.

9. Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως και $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι: Όταν το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 4, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.

10. α) Αν $|z|=1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

β) Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, \dots, z_k ισχύει $|z_1|=|z_2|= \dots = |z_k|=1$, να

αποδείξετε ότι: $|z_1 + z_2 + \dots + z_k| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_k} \right|$.